9.3.2 对坐标的曲面积分

1.有向曲面及曲面元素的投影

2. 对坐标的曲面积分的概念和性质

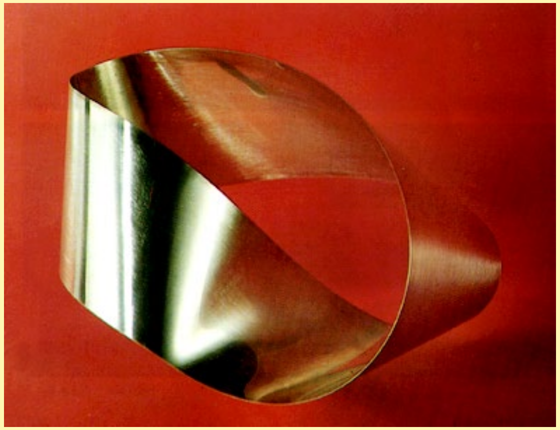
3. 对坐标的曲面积分的计算法

9.3.3 两类曲面积分之间的联系

有向曲面及曲面元素的投影

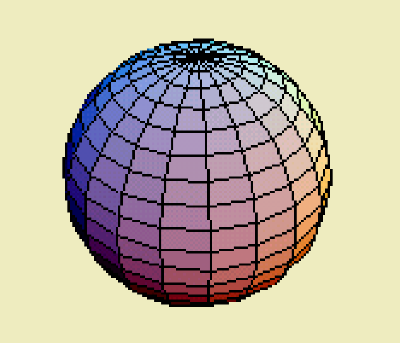
- 曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

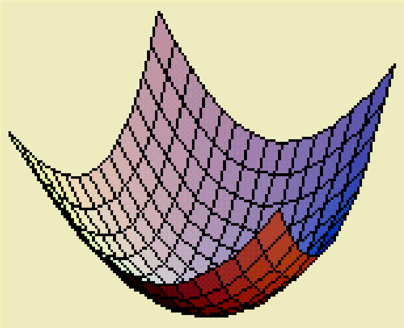
双侧曲面有内侧和外侧，左侧和右侧，上侧和下侧，前侧和后侧之分



莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



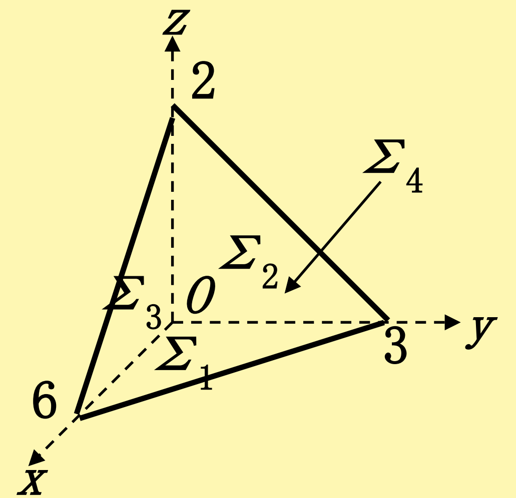


- 指定了侧的曲面叫**有向曲面**，其方向用**法向量指向**表示

方向余弦	$\cos\gamma$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	封闭曲面
侧的规定	>0 为上侧 <0 为下侧	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	外侧 内侧

如 Σ 取定了侧，则 $-\Sigma$ 或 Σ^{-} 表示取相反的侧。

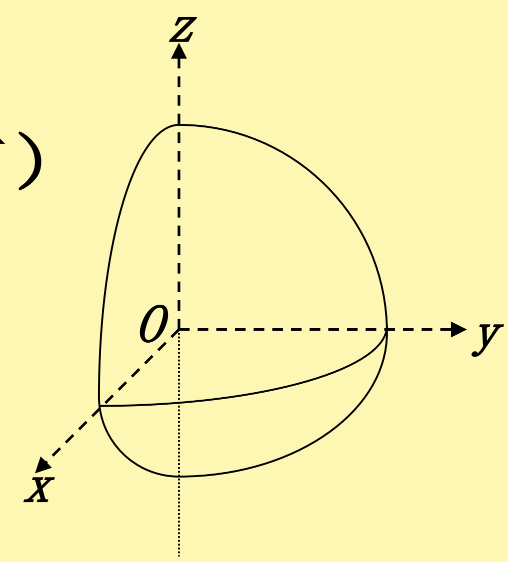
例如，Σ：$x+2y+3z=6$与坐标平面所围立体的边界曲面，取外侧。



则 Σ_1取下侧，Σ_2取后侧。

Σ_3取左侧　Σ_4取上侧（前、右）

例如，球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上 $x\geq0$、$y\geq0$的部分，取球面外侧。



若 $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$（对 xOy 平面而言）

分别取上侧、下侧

$x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$，取前侧。

$y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$，取右侧。

设Σ为有向曲面，取Σ上一小块曲面ΔS，投影到 xoy

平面上得一投影区域，其面积记为$(\Delta\sigma)_{xy}\geq 0$.

假定ΔS上各处的法向量与z轴的夹角 γ的余弦 $\cos\gamma$有相同的符号，若不然，要先对ΔS分块

规定 ΔS在 xoy平面上的有向投影$(\Delta S)_{xy}$为：

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

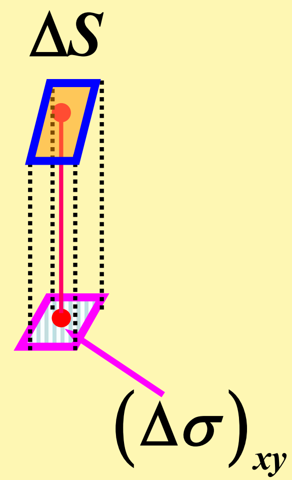
ΔS在$x0y$面上的投影$(\Delta S)_{xy}$ ：ΔS在$x0y$

面上的投影区域的面积 $(\Delta\sigma)_{xy}$附以一定的正负号。

$(\Delta\sigma)_{xy}$：ΔS 在xOy平面投影区域的面积

$(\Delta S)_{xy}$：ΔS 在xOy平面的有向投影

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma\geq 0时\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma<0时\end{cases}$$



设ΔS为有向平面Σ的一小块曲面，面积为ΔS：

$$(\Delta\sigma)_{xy}=(\Delta S)\cdot|\cos\gamma|\geq 0$$

$$(\Delta S)_{xy}=(\Delta S)\cdot\cos\gamma$$

取上侧：$(\Delta S)_{xy}=(\Delta\sigma)_{xy}$ 下侧：$(\Delta S)_{xy}=-(\Delta\sigma)_{xy}$

类似地可以定义ΔS在$y0z$面及$z0x$上的投影

$(\Delta S)_{yz}$ 和 $(\Delta S)_{zx}$

第二类曲面积分的引例

设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

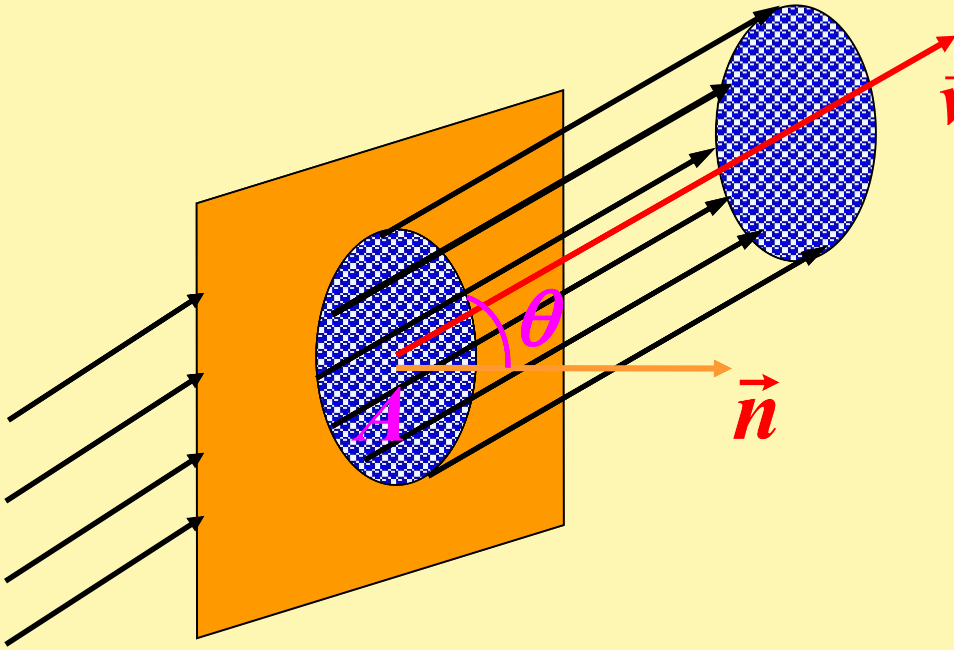
求单位时间通过有向曲面 Σ 的流量Φ（设体密度为1）。

分析　若 Σ 是面积为S 的平面,

法向量　$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

流速为常向量 $\vec{v}$ ，与 $\vec{n}$ 的夹角为 θ

流速为常向量 $\vec{v}$ ，与 $\vec{n}$ 的夹角为 θ



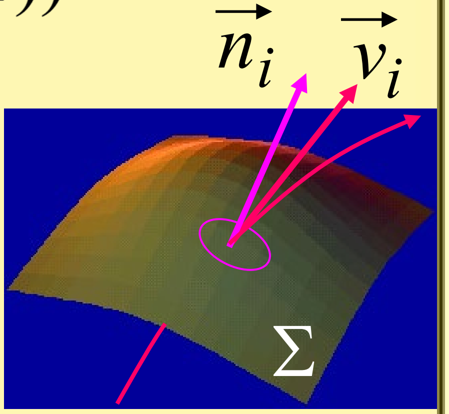
祖暅原理：两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等。

则通过闭区域A 流向 $\vec{n}$ 所指一侧的流量就为斜柱体体积(因为体密度为1)

$$\Phi = S \cdot |\vec{v}| \cos\theta = S\,\vec{v} \cdot \vec{n}$$

对一般的有向曲面Σ, 设稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“大化小， 常代变， 近似和， 取极限”



进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\Delta S_i$

设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$， 则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

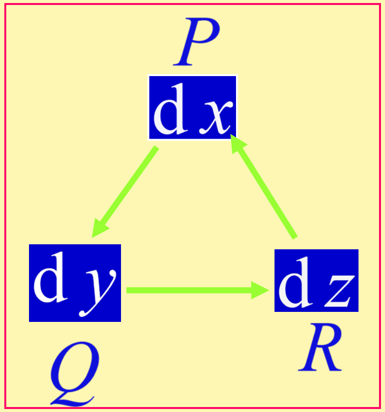
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

定义9.3.2 设Σ为光滑的有向曲面，在Σ上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，若对Σ的任意分割和在局部面元上任意取点,下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分。记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



P, Q, R 叫做被积函数；Σ 叫做积分曲面。

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

称为P在有向曲面Σ上对坐标y, z的曲面积分;

$$\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

称为Q在有向曲面Σ上对坐标z, x的曲面积分;

$$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

称为R在有向曲面Σ上对坐标 x, y的曲面积分.

引例中，流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

性质

(1) 若 $\Sigma=\bigcup_{i=1}^{k}\Sigma_i$，且$\Sigma_i$ 同侧，之间无公共内点，则

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 用Σ^- 表示 Σ 的反向曲面，则

$$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

对坐标的曲面积分的计算法

定理 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧，$R(x, y, z)$是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \mathbf{(1)}$$

证 $\displaystyle \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$\because \Sigma$ 取上侧，$\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))\,(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

说明 如果积分曲面 Σ 取下侧，则 $(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma_i)_{xy}$

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (1')$$

计算方法可概括为：“一代、二投影、三定向”

“一代” 曲面方程代入被积函数；

“二投影” 给出 Σ 在相应坐标平面上的投影区域；

“三定向” 根据曲面的侧选取正负号。

$\cos\gamma > 0$ $\cos\gamma < 0$

注意：计算时要保证曲面为同一侧，否则应分片计算。

计算 $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(1) $\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$ （上正下负）

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) $\Sigma: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$, （前正后负）

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(3) $\Sigma: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$, （右正左负）

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z,x), z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

特别地，在 S 上恒有：

(1) $\cos\alpha \equiv 0$，即 S 平行于 x 轴，则 $\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$；

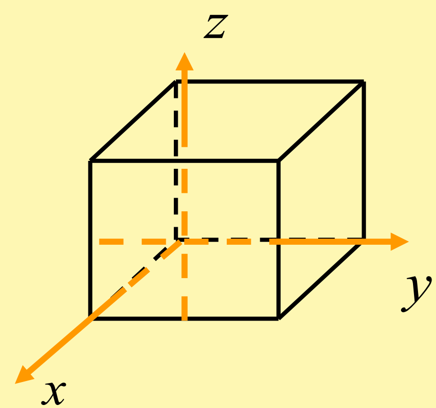
(2) $\cos\beta \equiv 0$，即 S 平行于 y 轴，$\iint\limits_S Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$；

(3) $\cos\gamma \equiv 0$，即 S 平行于 z 轴，$\iint\limits_S R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,

其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外侧， $\Omega=\{(x, y, z) \mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c\}$。

解 把有向曲面 Σ 分成以下六部分:



Σ_1: $z=c\,(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b)$ 的上侧;

Σ_2: $z=0\,(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b)$ 的下侧;

Σ_3: $x=a\,(0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c)$ 的前侧;

Σ_4: $x=0\,(0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c)$ 的后侧;

Σ_5: $y=b\,(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant c)$ 的右侧;

Σ_6: $y=0\,(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant c)$ 的左侧;

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz = ?$$

除 Σ_3、Σ_4外，其余四片曲面在$y0z$面上的投影为零，因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \iint_{\Sigma_3} x^2 dydz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dydz$$

Σ_3：$x=a\,(0\leqslant y\leqslant b，0\leqslant z\leqslant c)$ 的前侧；

Σ_4：$x=0\,(0\leqslant y\leqslant b，0\leqslant z\leqslant c)$ 的后侧；

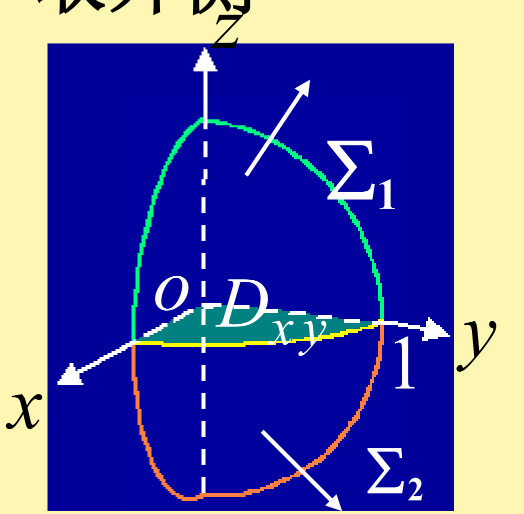
$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \iint_{D_{yz}} a^2 dydz - \iint_{D_{yz}} 0^2 dydz = a^2bc$$

类似地可得 $\iint_{\Sigma} y^2 dzdx = b^2ac$，$\iint_{\Sigma} z^2 dxdy = c^2ab.$

于是所求曲面积分为$(a+b+c)\,abc$。

例2 计算曲面积分 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中Σ为球面 x^2+ $+y^2+z^2=1$ 在第一和第五卦限部分，取外侧

根据对称性 $\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0$



解： 曲面Σ对于平面 xOy 不同侧，要先把曲面分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

求对坐标 x, y 的积分，要先把曲面表示为 $z=z(x,y)$，再往 xOy 平面作有向投影

$$(x,y)\in D_{xy}: \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} \qquad (x,y)\in D_{xy} : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

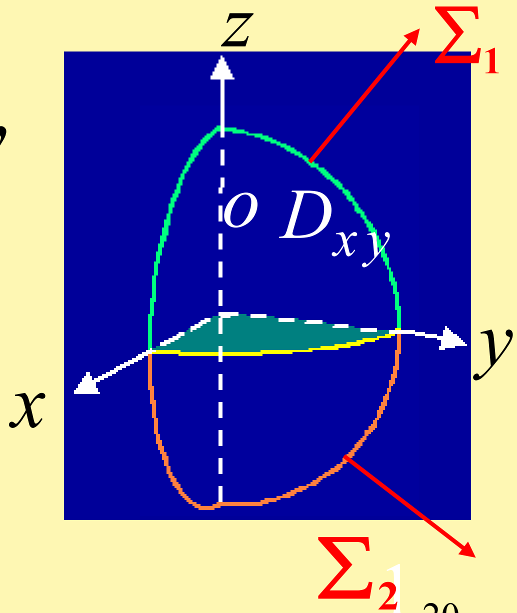
$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \cdots = 2/15$$



说明 对坐标的曲面积分由于有Σ的取向在内，所以具有和定积分，重积分，第一类曲线积分，第一类曲面积分在对称性问题上不同的结论。

计算第二类曲线积分，第二类曲面积分时慎用对称性解题

经验证，特殊情况下，轮换对称性仍成立：

设S是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

9.3.3 两类曲面积分之间的联系

1．设有向曲面Σ由方程z =z （x， y)给出， Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数z =z （x， y） 在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，R(x， y， z)在Σ上连续。如果Σ取上侧，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

另一方面，因上述有向曲面Σ的法向量

$$\vec{n} = \{-z_x, \ -z_y, \ 1\} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

Σ: $z = z(x, y)$ 取上侧

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \qquad dS = \sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}\,dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\,S$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\frac{1}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dxdy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\,S = \iint_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy \qquad (2)$$

如果Σ取下侧，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

但此时 $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$,

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma \, dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)] \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

类似可推得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS. \quad （3）$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS \quad （4）$$

合并（2）、（3）、（4）三式，得两类曲面积分之间的如下关系：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \quad （5）$$

其中cos α、cos β、cos γ 是有向曲面Σ上点（x，y，z）处的法向量的方向余弦。

$$\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

$$=\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

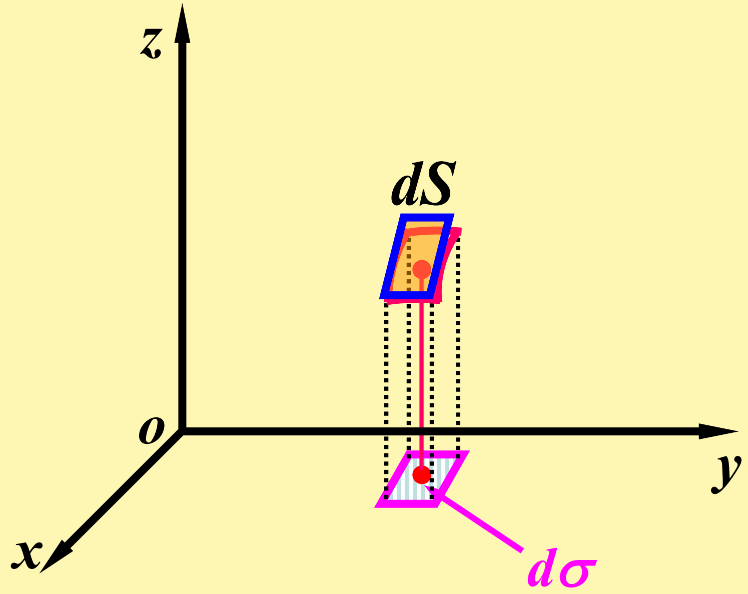
$$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

投影：$\mathrm{d}\sigma=|\cos\gamma|\mathrm{d}S$

有向投影$(\mathrm{d}S)_{xy}=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$



$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

向量形式 $\iint_{\Sigma}\{P, Q, R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$

$$= \iint_{\Sigma}\{P, Q, R\}\cdot\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

令 $\vec{A} = \{P, Q, R\}$, $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = \{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$有向曲面元

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

例5 把对坐标的曲面积分$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$化成对面积的曲面积分，其中Σ是$z = 8-(x^2+y^2)$在x0y面上方部分的上侧。

解 $\Sigma: z - 8 + x^2 + y^2 = 0$

$$\vec{n} = \{-z_x, -z_y, 1\} = \{2x, 2y, 1\}$$

$$\overrightarrow{n^o} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

$$= \{\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\}$$

所以$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义

- $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

- $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

性质 $$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$

$$=\iint_{\Sigma}\{P,Q,R\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

可以认为: $\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$

$$=\{\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S\}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,dS \quad \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\,dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\,dS=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类（对面积）}\\ \text{第二类（对坐标）}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

（1）统一积分变量—— 代入曲面方程

(方程不同，不同侧时要分片积分)

$$\text{（2）积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：面积投影}\\ \text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

（4）确定积分域——把曲面积分域投影到相关坐标面

注：二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧取“+”， 下侧取“–”）

类似可考虑在 yoz 面及 zox 面上的二重积分转化公式 .